Title	淡中氏ノ双對定理ニ就イテ（M.Kreinノ方法紹介）
Author(s)	大塚位相數學談話會
Citation	全国紙上数学談話会. 216 p.197-p.217
Issue Date	1941-06-02
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74857
rights	
Note	

927. 淡中氏ノ双對定理ニ就イテ
(M. Krein ノ方法紹介)

大塚位相數學談話會

最近ノ C. R. URSS, Vol. 31, No. 1, (1941) デ M. Krein ハ淡中氏ノ非可換群ノ双對定理ノ別証明ヲ與ヘタ。証明自体ハ寧ロ淡中氏ノヨリモ複雑デアルガ、Gelfand ノ normed ring ノ應用ト見レバ極メテ面白イ方法デアル様ニ思ハレルノデ、以下ニ出來ル丈ケ丁寧ニ紹介シタイト思ヒマス。

其ノ方法ハ一ツノ大キナ normed ring R ノ中ニ三ツノ normed ring R_1, R_2, R_3 ヲ embed シテ、R_3 ノ構造（特ニ maximal ideal ノ性質）ヲ既知ノ R_1, R_2 ノ性質カラ導クトイフノデアル。Krein ハ途中デ positive functional ニ關スル定理ヲ用ヒテ來ルガ（定理 3）、コレハ寧ロ双對定理ノ應用ト考ヘタ方ガヨイト思ハレル。（§7 參照）又一般ニ十分ニ澤山ノ almost periodic function ヲ持ツ group ハ結局 bicompact group ノ場合ニ帰着サレルカラ（§6）、初メカラ bicompact group ノ場合ニ限ッテ考ヘルコトニスル。

引用文獻ハ

(1) T. Tannaka, Über den Dualitätssatz in nichtkommutativen topologischen Gruppen, 東北, 45巻 (1938), (本誌, 149, 151 号)

(ii) I. Gelfand, Normierte Ringe, Rec. Math., T. 9, No. 1 (1941)

§ 1

G ヲ bicompact topological group トスル。積空間G×G ノ上デ次ノ如キ複素数値函数 $\Phi(x, y)$ ノ全体ノ集リ P ヲ考ヘル。

(1) $\Phi(x, y)$ ハ G × G 上デ連續,

(2) $\Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}$,

(3) Φ ハ positive definite : 任意ノ scalar $\xi_1, \cdots\cdots, \xi_n$ ニ對シテ

$$\sum_{i,j} \Phi(x_i, x_j)\, \xi_i \overline{\xi_j} \geqq 0$$

先ヅ $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$ ガ P ニ屬スレバ, $\alpha\Phi_1(x, y)$ (α : 實正數), $\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)$, $\Phi_1(x, y) \times \Phi_2(x, y)$ モ亦 P ニ屬スル。

初メノ二ツノ場合ハ明カ。積ノ場合ハ $\Phi_2(x_i, x_j)\xi_i\overline{\xi_j} = a_{ij}$ トオケバ, $A = (a_{ij})$ ハ positive definite Hermitian matrix ナル故, $A = UDU^{-1}$ トアラハサレル。此処ニ U ハ unitary matrix, $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$, $\alpha_i \geqq 0$ トスル。故ニ $(s_{ij}) = U\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix}$ トオケバ, $A = S \cdot \overline{S}'$ トナル。即チ $\sum_{i,j} \Phi_1(x_i, x_j)\Phi_2(x_i, x_j)\xi_i\overline{\xi_j}$

$$= \sum_k \sum_{i,j} \Phi_1(x_i, x_j)\, s_{ik} \overline{s_{jk}} \geqq 0.$$

次ニ$\Phi(x,y)$ノnormヲ(4)デ定メル。

$$(4)\quad \|\Phi(x,y)\| = \underset{x}{Max}|\Phi(x,x)|$$

(3)ノ條件デ特ニ$n=1,2$ノ場合ニハ

$$(5)\quad \begin{cases} \Phi(x,x) \geqq 0 \\ |\Phi(x,y)| \leqq \sqrt{\Phi(x,x),\Phi(y,y)} \leqq \|\Phi\|. \end{cases}$$

定理1. 『Rヲ$\Phi(x,y)=\Phi_1(x,y)-\Phi_2(x,y)$ (Φ_1, $\Phi_2 \in P$)ノ全体トシ

$$\|\Phi\| = \underline{fin}(\|\Phi_1\|+\|\Phi_2\|)$$

(コヽニ$\underline{fin}$ハΦノカヽルスベテノ分解ニツイテ考ヘル)

トスレバ, Rハ實係數ノnormed ringトナル。』

(証) Rが実係数ヲ許スRingヲ作ルコトハ明カデアル。

$$(6)\quad \|\Phi_1+\Phi_2\| \leqq \|\Phi_1\|+\|\Phi_2\|,\quad \|\alpha\Phi_1\| = |\alpha|\,\|\Phi\|,$$
$$\|\Phi_1\cdot\Phi_2\| \leqq \|\Phi_1\|\cdot\|\Phi_2\|$$

中, 例ヘバ最後ノ関係ヲ驗シテミル。$\Phi_1,\Phi_2 \in P$ノトキハ大丈夫デアル。故ニ

$$\Phi_1 = \Phi_1' - \Phi_1'',\quad \Phi_2 = \Phi_2' - \Phi_2''\ (\Phi_1' \cdots\cdots \Phi_2'' \in P)$$

ト分解シテ

$$\|\Phi_1\| + \varepsilon \geqq \|\Phi_1'\| + \|\Phi_1''\|,$$
$$\|\Phi_2\| + \varepsilon \geqq \|\Phi_2'\| + \|\Phi_2''\|$$

トスレバ,

$$\Phi_1\cdot\Phi_2 = (\Phi_1'\Phi_2' + \Phi_1'' + \Phi_2'') - (\Phi_1'\Phi_2'' + \Phi_1''\Phi_2')$$

ヨリ

$$\|\Phi_1\cdot\Phi_2\| \leqq \|\Phi_1'\Phi_2' + \Phi_1''\Phi_2''\| + \|\Phi_1'\Phi_2'' + \Phi_1''\Phi_2'\|$$

$$\leqq (\|\Phi_1'\| + \|\Phi_1''\|)(\|\Phi_2'\| + \|\Phi_2''\|)$$

$$\leqq (\|\Phi_1\| + \varepsilon)(\|\Phi_2\| + \varepsilon)$$

コンデ ε ハ任意デアルカラ，(6) ガ成立ツ。

次ニ R ガコノ *norm* デ *complete* ナルコトハ $\{\Phi_n\}$ ガ $\lim_{m,n\to\infty} \|\Phi_m - \Phi_n\| = 0$ ヲ満足スルモノトスル。部分列 $\{r_n\}$ ヲトッテ $\sum_{n=1}^{\infty} \|\Phi_{r_n} - \Phi_{r_{n+1}}\| < +\infty$ ニスル。

$$\Phi_{n_r} - \Phi_{n_{r+1}} = F_n - F_n' \quad (F_n, F_n' \in P)$$

トシテ，

$$\|\Phi_{n_r} - \Phi_{n_{r+1}}\| + \frac{1}{2^n} \geqq \|F_n\| + \|F_n'\|$$

トスル。コノ時又 $\sum_1^{\infty} \|F_n\| < +\infty$, $\sum_1^{\infty} \|F_n'\| < +\infty$ トナル。

(5) カラ $\sum_1^{\infty} F_n(x, y)$，及ビ $\sum_1^{\infty} F'(x, y)$ ハ $G \times G$ 上デ一様ニ収斂スルカラ，其ノ極限 $F, F' \in P$ トナル。

$\Phi(x, y) = F(x, y) - F'(x, y)$ ガモトムル *limit* ニナル。——

又 R 中デモ

(5') $\quad |\Phi(x, y)| \leqq \|\Phi\|$

ノ成立スルコトモスグニワカル。

§ 2

M. Krein ノ *Lemma*. 「實係數ノ *normed ring*

ハ必ズ複素係数ノ normed ring ニ擴大出来ル』

(証) R ヲ實係数ノ normed ring トシ，$F = f + ig$ $(f, g \in R)$ ノ全体ヲ $\mathfrak{R}$ トスレバ，$\mathfrak{R}$ ハ明カニ複素係数ノ ring ヲ作ル。此ノトキ $f = F^+$，$g = F^-$ ト書クコトニスル。

(ク) $\|F\| = \max_\theta \|f\cos\theta - g\sin\theta\|$

$$= \max_\theta \|(e^{i\theta}F)^+\|$$

トキメレバ，$\|F+G\| \leqq \|F+G\|$，$\|\alpha F\| = |\alpha|\,\|F\|$ (α: complex number) トナレコトハスグニワカル。次ニコノ norm ニ関シテ積モ亦連續デアルタメニハ，例ヘバ

$$\|FG\| \leqq 2\|F\|\,\|G\|$$

ヲ証明スレバヨイ。$\|FG\| = \|(e^{i\theta}FG)^+\|$ トスレバ，$F_1 = e^{i\theta}F$ トオイテ

$$\|FG\| = \|(F_1G)^+\| = \|F_1^+G^+ - F_1^-G^-\|$$
$$\leqq \|F_1^+\|\,\|G^+\| + \|F^-\|\,\|G^-\|$$
$$\leqq 2\|F_1\|\,\|G\| = 2\|F\|\,\|G\| \text{ —— }$$

最後ニ $\mathfrak{R}$ ノ complete ナルコトハ，夫々 +，− 成分ニツイテ考ヘレバ R ノ場合ニ帰着出来ルカラ，Gelfand, Satz 1 ニヨリ $\mathfrak{R}$ ハ normed ring トナル，q.e.d.

故ニ §1 デ考ヘタ R ヲ，コノ Lemma ニヨリ $\mathfrak{R}$ マデ拡大スル。§3，4 デ $\mathfrak{R}$ ノ normed subring $\mathfrak{R}_1$，$\mathfrak{R}_2$，$\mathfrak{R}_3$ ヲ考ヘル。

§ 3

$\mathfrak{R}_0$ ヲ G ノ上ノ complex valued continuous function 全体ニ uniform topology ヲ入レテ生ズル normed ring トスル。

(イ) $\mathfrak{R}_0 \ni f(x)$ カラ, $F(x, y) = f(x)$ ト置ケバ, $F(x, y) \in \mathfrak{R}$ トナル。

(証) $F(x, y)^+ = \frac{1}{2}\left(F(x, y) + \overline{F(y, x)}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + \overline{f(y)}\right)$

$$= \frac{1}{4\mu}\left\{(\mu + f(x))(\mu + \overline{f(y)}) - (\mu - f(x))(\mu - \overline{f(y)})\right\}$$

$$(\mu > 0)$$

同様ニ $F(x, y)^- = \frac{1}{2}\left(F(x, y) - \overline{F(y, x)}\right)$

$$= \frac{1}{4\mu}\left\{(f(x) + i\mu)(\overline{f(y)} - i\mu) - (f(x) - i\mu)(\overline{f(y)} + i\mu)\right\}$$

ハ共ニ R ニ属スルカラ, 従ッテ $F(x, y) = F(x, y)^+ + iF(x, y)^- \in \mathfrak{R}$ —

故ニ $F(x, y)$ ノ全体 $\mathfrak{R}_1 (\cong \mathfrak{R}_0)$ ハ $\mathfrak{R}$ = embed サレタ。次ニ norm ニツイテ

(ロ) $\frac{1}{2}\underset{x}{Max}|f(x)| \leqq \|F(x, y)\| \leqq 4\underset{x}{Max}|f(x)|$

(証) 定義ヨリ $\|F\| \leqq \|F^+\| + \|F^-\|$

$$\leqq \frac{1}{4\mu}\left\{\underset{x}{Max}|\mu + f(x)|^2 + Max|\mu - f(x)|^2 + Max|f(x) + i\mu|^2 + Max|f(x) - i\mu|^2\right\}$$

$$\leqq \frac{1}{\mu}\left\{\mu + Max|f(x)|\right\}^2$$

此処デ $\mu = Max|f(x)|$ トオケバ

$$\|F\| \leqq 4\,Max|f(x)|^2$$

逆ニ $|f(x)| = |F(x,y)^{+} + iF(x,y)^{-}| \leqq |F(x,y)^{+}| + |F(x,y)^{-}|$
$\leqq \|F^{+}\| + \|F^{-}\| \leqq 2\|F\|$ （コヽニ(5′)式ヲ用ヒタ）

故ニ(ロ)ガ成立スル。

定理2. 『$\mathfrak{R}_0 \ni f(x) \longleftrightarrow F(x,y) \ (= f(x))$ ニヨツテ生ジ $\mathfrak{R}$ ノ normed subring $\mathfrak{R}_1$ ハ normed ring トシテ $\mathfrak{R}_0$ ト isomorph ニシテ homeomorphic デアル。

$F(x,y) = f(y) \in \mathfrak{R}_0$ ナル $F(x,y)$ ノ全体ノ作ル $\mathfrak{R}_2$ ニ関シテモ同様デアル』

次ニ $\mathfrak{R}$ ト $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ トノ関係

定理3. 『$\mathfrak{R}_1 \frown \mathfrak{R}_2$ ハ e ノ scalar 倍ヨリナル。又 $\mathfrak{R}$ 中 $\mathfrak{R}_1$ ト $\mathfrak{R}_2$ トヲ含ム最小ノ normed ring ハ $\mathfrak{R}$ 自身デアル。』

(証) 前半ハ明カ。後半ハ，$\mathfrak{P}$ ガ $\mathfrak{R}_1$ ト $\mathfrak{R}_2$ トノ作ル $\mathfrak{R}$ ノ subring ノ limit トシテ表ハサレルコトヲ示セバヨイ。G ノ invariant integral ヲ $\int dx$ デ示セバ，$\Phi(x,y) \in \mathfrak{P}$ ニ對シテ，

$$\varphi(x) = \lambda \int \Phi(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

ノ Eigenvalue $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ ハスベテ positive デ，Mercer ノ定理（例ヘバ Courant, Hilbert (C. H.) Mathematische Physik, Bd. 1, p. 117, 参照）カラ，λ_n ニ對スル Eigenfunction ヲ $\varphi_n(x)$ トスレバ

(8) $$\Phi(x, y) = \sum_{k} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k}$$

ト一様且ツ絶対ニ収斂スル。此ノ時 $\varphi_k(x) \in \mathcal{R}_1$, $\overline{\varphi_k(y)} \in \mathcal{R}_2$ デ，且ツ

$$\Phi_n(x, y) = \Phi(x, y) - \sum_{1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k}$$

ハ又 (1), (2), (3) ヲ満足シ，P ニ属スル故，(4) ニヨッテ

$$\|\Phi_n(x, y)\| = \underset{x}{Max} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

ソトナル。 q. e. d.

§ 4

コヽニ今一ツノ $\mathcal{R}$ ノ normed subring $\mathcal{R}_3$ ヲ考ヘル。

$f(x)$ ヲ G 上ノ complex valued continuous function トシテ，

(9) $$f(x) = \overline{f(x^{-1})}$$

(10) $$\sum_{i,j=1}^{n} f(x y^{-1})\xi_i \overline{\xi}_j \geqq 0$$

ヲ満足スル $f(x)$ ノ全体ヲ考ヘル。コレヲ P_G ト書クコトニスル。

bicompact group G ノ互ヒニ equivalent デナイ完全既約 unitary 表現系ヲ $\{ u_{ij}^{(\alpha)}(x) \}$ トスル。又ソノ matrix ノ次数ヲ r_α トスル。

$$a_{ij}^{(\alpha)} = (f(x), u_{ji}^{(\alpha)}(x)) = \int f(x)\, \overline{u_{ji}^{(\alpha)}(x)}\, dx$$

トオケバ, (9) カラ $A^{(\alpha)} = (a_{ij}^{(\alpha)})$ ハ r_α 次ノ Hermitian Matrix トナル。

$$A^{(\alpha)} = U_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^{(\alpha)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{r_\alpha}^{(\alpha)} \end{pmatrix} U_\alpha, \quad \lambda_1^{(\alpha)}, \cdots\cdots, \lambda_{r_\alpha}^{(\alpha)} \geqq 0$$

ト unitary matrix ヲ用ヒテ diagonal form ニナホシテ

$$U_\alpha U^{(\alpha)}(x)\, U_\alpha^{-1} = V^{(\alpha)}(x) = (v_{ij}^{(\alpha)}(x))$$

ヲ作レバ, $f(x)$ ノ Fourier 式展開ハ次ノ如クニ與ヘラレル。

$$\text{(11)} \quad f(x) \sim \sum_\alpha \sum_{ij} a_{ji}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(x) = \sum_\alpha Sp\,(A^{(\alpha)} U^{(\alpha)}(x))$$

$$= \sum_\alpha Sp\left(U_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^{(\alpha)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{r_\alpha}^{(\alpha)} \end{pmatrix} U_\alpha U^{(\alpha)}(x) \right)$$

$$= \sum_\alpha Sp\left(\begin{pmatrix} \lambda_1^{(\alpha)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{r_\alpha}^{(\alpha)} \end{pmatrix} V^{(\alpha)}(x) \right) = \sum_\alpha \sum_i \lambda_i^{(\alpha)} v_{ii}^{(\alpha)}(x)$$

一方 $v_{ii}^{(\alpha)}(xy^{-1}) = \sum_{k=1}^{r_\alpha} v_{ik}^{(\alpha)}(x)\, \overline{v_{ik}^{(\alpha)}(y)}$ ナル故 (11) ヨリ

$$(f(x, y^{-1}), \sqrt{r_\alpha}\, v_{il}^{(\alpha)}(y))$$

$$= \sum_\alpha \sum_j \lambda_j^{(\alpha)} \sum_k v_{jk}^{(\alpha)}(x) \left(\overline{v_{jk}^{(\alpha)}(y), \sqrt{r_\alpha}\, v_{il}^{(\alpha)}(y)} \right).$$

$$= \frac{\lambda_i^{(\alpha)}}{r_\alpha} \cdot \sqrt{r_\alpha}\, v_{il}^{(\alpha)}(x),$$

即チ $\sqrt{r_\alpha}\, v_{ij}^{(\alpha)}(x)$ $(j = 1, \cdots\cdots, r_\alpha)$ ハ

$$(12)\quad \varphi(x) = \lambda \int f(xy^{-1})\varphi(x)\,dx$$

ナル積分方程式ノ Eigenvalue $\frac{r_\alpha}{\lambda_i^{(\alpha)}}$ ニ對スル Eigen-function ヲ作リ，α, i ヲスベテ動カセバ (12) 式ノ Eigen-function ノ complete system ヲ作ル。

再ビ Mercer ノ定理カラ

$$f(xy^{-1}) = \sum_\alpha \sum_{ik} \frac{\lambda_i^{(\alpha)}}{r_\alpha} \cdot \sqrt{r_\alpha}\, v_{ik}^{(\alpha)}(x) \cdot \overline{\sqrt{r_\alpha}\, v_{ik}^{(\alpha)}(y)}$$

$$(\lambda_i^{(\alpha)} \geqq 0)$$

$$= \sum_\alpha \sum_{ik} \lambda_i^{(\alpha)} v_{ik}^{(\alpha)}(x) \overline{v_{ik}^{(\alpha)}(y)}$$

ハ $G \times G$ デ一様且ツ絶對ニ收斂シ，特ニ $y = e$ トオケバ

$$(13)\quad f(x) = \sum_\alpha \lambda_i^{(\alpha)} v_{ii}^{(\alpha)}(x)$$

ハ G デ一様且ツ絶對ニ收斂スル。故ニ

$$(14)\quad F(x, y) = f(xy^{-1})$$

トシテ P_G ヲ $\mathfrak{R}$ ノ一部ト考ヘレバ，$P_G \subset P$ ナル故

$$(15)\quad \|F(x,y)\| = \max_x |f(x \cdot x^{-1})| = f(e) = \sum_{\alpha \cdot i} \lambda_i^{(\alpha)}$$

トナル。一方 (15) ハ (12) ノスベテノ Eigenvalue ノ逆數ノ和トモナッテヰル。

$$(15')\quad \|F\| = \sum_{\alpha, i} \lambda_i^{(\alpha)} = \sum_{\alpha, i} r_\alpha \cdot \left(\frac{r_\alpha}{\lambda_i^{(\alpha)}}\right)^{-1}$$

サテ §1 ト同様ニ，P_G カラ R_G ヲ $f_1, f_2 (\in P_G)$ ノ差トシテアラハサレル全体トスレバ實係數ノ normed ring ヲ作リ，(14) ノ對應デ $R_G \cong R_3 \subset R \subset \mathfrak{R}$ トナル。

$R_G \ni f(x)$ カラ作ッタ(12)ナル積分方程式ヲ考ヘレバ，(11)ノ展開式ハ（$\lambda_i^{(\alpha)} \geqq 0$ トイフコトダケヲ除イテ）ソノママニ成立スル。此ノ時 $F(x, y) = f(xy^{-1})$ ニ對シテ

$$(16) \quad \| F(x, y) \| = \sum_{\alpha, i} | \lambda_i^{(\alpha)} |$$

ヲ証明スル。

$$R_G \ni f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad (f_1, f_2 \in P_G),$$

即 $f(xy^{-1}) = f_1(xy^{-1}) - f_2(2y^{-1})$

カラ，三ツノ hermitian kernel $f(xy^{-1})$, $f_1(xy^{-1})$, $f_2(xy^{-1})$ ニ對シテ C.H. Bd. I P. 113 ノ定理*ヲ適用スル，先ヅ

$f_i(xy^{-1})$ $(i = 1, 2)$ ニ對スル(12)式ノ Eigenvalue ヲ $\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \cdots\cdots, (\lambda_j^{(i)} > 0)$; $\sum_k \frac{1}{\lambda_k^{(i)}} = f_i(e)$，$f(xy^{-1})$ ノ(12)式ノ正及ビ負ノ Eigenvalue ヲ夫々 $\lambda_1^{\pm}, \lambda_2^{\pm}, \cdots\cdots$, トスレバ $(15')$ 同様ニ

$$(17) \quad \begin{cases} \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{+}} = \sum_{\alpha, i}{}' \lambda_i^{(\alpha)} & (\text{コゝニ} \sum{}' \text{ハ} \lambda_i^{(\alpha)} > 0 \text{ ニツイテノ和}) \\ \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{-}} = \sum_{\alpha, i}{}'' \lambda_i^{(\alpha)} & (\text{コゝニ} \sum{}'' \text{ハ} \lambda_i^{(\alpha)} < 0 \text{ ニツイテノ和}) \end{cases}$$

トナル。此処デ C.H ノ定理*カラ

$$(18) \quad \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{(1)}} \geqq \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{+}}; \quad -\sum_k \frac{1}{\lambda_k^{(2)}} \leqq \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{-}}$$

トナル。故ニ(17)ト共ニ

$$(19) \quad \sum_{i, \alpha} | \lambda_i^{(\alpha)} | \leqq \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{(1)}} + \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{(2)}} = f_1(e) + f_2(e)$$

$$= \|f_1\| + \|f_2\|$$

トナル一方

$$(20)\quad \begin{cases} f_1^0(x) = \sum_{\alpha,i}{}' \lambda_i^{(\alpha)} v_{ii}^{(\alpha)}(x) \\ -f_2^0(x) = \sum_{\alpha,i}{}'' \lambda_i^{(\alpha)} v_{ii}^{(\alpha)}(x) \end{cases}$$

ト置ケバ，(19) 式ヨリ絶對且ツ一様ニ收斂スル。故ニ

$f_1^{(0)}, f_2^{(0)} \in P_G$ トナリ，$f = f_1^{(0)} - f_2^{(0)}$ デアレカラ

$$(21)\quad \|f_1^0\| + \|f_2^0\| = f_1^0(e) + f_2^0(e) = \sum_{\alpha,i} |\lambda_i^{(\alpha)}|$$

トナル。(19) ト (21) トカラ R_G ニオケル $\|f\|$ ノ定義ニヨリ (16) ノ成立スルコトガワカル。

サテ $R_G \cong R_3$ ヲ M. Krein ノ Lemma デ complex coef ノ normed ring ニ擴大シタモノヲ $\mathcal{R}_3 \subset \mathcal{R}$ トスル。

§ 5

此處デ $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}, \mathcal{R}_3$ ノスベテノ maximal ideal ヲ決定スル。先ヅ

Lemma 2 (Stone). $\mathcal{R}_0$ ヲ bicompact ナ G 上ノスベテノ複素數値連續函數ノ全体ノ作ル normed ring トスル。(§3). $\mathcal{R}_0$ ノ任意ノ maximal ideal $\mathfrak{I}_0$ ハ G 上ノ一定点 x_0 デ 0 ナル値ヲトル $\mathcal{R}_0$ ノ元全体トナル。

(証) $\mathcal{R}_0 \to \mathcal{R}_0/\mathfrak{I}_0$ ナル homomorphic continuous ナ對應ヲ F_0 トスル。先ヅ $f(x) \in \mathcal{R}_0$ ガ實函數ナルトキハ $F_0(f)$ モ亦實數トナルコトハ Gelfand, Satz 15 ヨリワカル。今 G ノ各点 x_1 ニ對シテ $f(x) \neq 0$

ナル$\mathfrak{J}_0$ニ屬スル實函數ガアルトスレバ，ソノ一ツヲトリf_{x_1}トスル。即チ$f_{x_1}(x_1) \neq 0$.

$U_{x_1} = E_x(f_{x_1}(x)^2 > 0)$トスレバ，$G$ノ bicompact ナルコトカラ，カヽル有限箇ハG全体ヲオホフ。コノ有限箇ニツイテノ和$\sum f_{x_1}(x)^2 = f_0(x) \in \mathfrak{J}_0$ハ$G$上至ル所$0$ニナラヌカラ，$f_0^{-1}(x) \in \mathfrak{R}_0$トナル。コレハ矛盾ヲ生ズル。故ニ$\mathfrak{J}_0$ニ屬スル實函數ハスベテ一点$x_0$デ$0$トナル。

故ニ實函數fニ對シテハ$F(f) = f(x_0)$トナル。一般ニ$F(f_1(x)+if_2(x)) = F(f_1)+iF(f_2) = f_1(x_0)+if_2(x_0)$トナルカラ，Lemma ハ証明セラレタ。

<u>定理4</u>　『§2ノ normed ring $\mathfrak{R}$ニテ，任意ノ maximal ideal $\mathfrak{J}$ニ對シテ$G \ni x_0, y_0$ガ定マリ，$\mathfrak{J}$ハ$\Phi(x_0, y_0) = 0$ナルΦノ全体トナル。』

(証)　$\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}/\mathfrak{J}$ナル$\mathfrak{R}$ノ continuous functional ヲ$F(\Phi)$トスル。

$\mathfrak{J}_i = \mathfrak{J} \frown \mathfrak{R}_i$ $(i = 1, 2)$トスレバ，$\mathfrak{R}_i \to \mathfrak{R}_i/\mathfrak{J}_i$ナル continuous functional ハ夫々$F(\Phi_i)$ $(\Phi_i \in \mathfrak{R}_i)$ニ等シイ。Lemma 2ヨリ$x_0, y_0$ガ定マッテ，

$$F(\Phi_1(x, y)) = \Phi_1(x_0, y) = \Phi_1(x_0, y_0);$$

$$F(\Phi_2(x, y)) = \Phi_2(x, y_0) = \Phi_2(x_0, y_0)$$

トナル。Fハ multiplicative continuous functional デアルカラ(Gelfand, Satz 7)定理3ニヨリFハ$F(\mathfrak{R}_1)$，$F(\mathfrak{R}_2)$ノ延長トシテ一義ニ定マル。即

$$F(\Phi) = \Phi(x_0, y_0)$$

ガ成立スル。q.e.d.

次ノ定理5ハ後ニ見ルヤウニ双對定理（定理7）トノ等値ナモノデアル。

<u>定理5</u>　『$\mathfrak{R}_3$ノ任意ノMaximal ideal $\mathfrak{J}_3$ハアル$G \ni x_1$デ0トナル$f(x) \in \mathfrak{R}_3$ノ全体デアル』

（証）$\mathfrak{J}_3$ヲ$\mathfrak{R}$ノ中ノmaximal ideal $\mathfrak{J}$ニマデ拡大スル（Gelfand, Satz 5）即チ$\mathfrak{J} \frown \mathfrak{J}_3 = \mathfrak{J}_3$. 即$\mathfrak{R}_3 \to \mathfrak{R}_3/\mathfrak{J}_3$ナルFunctional F_3ハ$\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}/\mathfrak{J}$ナル$\mathfrak{R}$全体デ定義サレタFunctional Fニマデ拡大サレタ譯デアル。從ッテ定理4カラ

$F(\Phi(x,y)) = \Phi(x_0, y_0)$トナリ，特ニ$\Phi(x,y) = f(xy^{-1}) \in \mathfrak{R}_3$ニ對シテハ

$$F(\Phi(x,y)) = f(x_0 y_0^{-1}) = f(x_1) \quad (x_1 = x_0 y_0^{-1})$$

トナル．q.e.d.

注意．$\mathfrak{R}$ニ含マレル$\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ニ對シテ，夫々ノmaximal idealノ作ルbicompact spaceヲ$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_i\ (i=1,2,3)$トスレバ，今ノ場合$\mathfrak{M}_i$ハ$\mathfrak{M}$カラ"Zerlegungsraum"トシテ作ラレ，$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$トナッタ。一般ニ

『$\mathfrak{R}_1$ヲnormed ring $\mathfrak{R}$ノnormed subringトスル。（勿論$\mathfrak{R}_1$ノnormハ$\mathfrak{R}$ノnormヨリ定メル）夫々ノmaximal idealノ作ルbicompact spaceヲ$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$トスレバ、$\mathfrak{M} \ni \mathfrak{J} \to \mathfrak{J} \frown \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{J}_1 \in \mathfrak{M}_1$ナル對應デ，$\mathfrak{M}_1$ハ$\mathfrak{M}$ノZerlegungsraumトナル』

『$\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ ガ normed ring $\mathfrak{R}$ ノ normed subring デ，$\mathfrak{R}_1 \frown \mathfrak{R}_2$ ハ e ノ scalar 倍ノミヨリナリ，$\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ ヲ含ム最小ノ $\mathfrak{R}$ ノ normed subring ガ $\mathfrak{R}$ 自身ナルトキハ $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ ト直積空間トシテ表ハサレル。』

イヅレモ証明ハ定義カラ直チニワカル。——

§6

淡中氏ノ bicompact group G ニ於ケル双對定理ハ次ノ形デ言ヒ表ハサレル。（T. Tannaka, Hilfssatz 4）

<u>定理6</u>（淡中）『G ノ完全既約 unitary 表現系 $\{u_{ij}^{(\alpha)}(x)\}$ カラ，ソノ成分 $u_{ij}^{(\alpha)}(x)$ ノ linear combination ノ作ル ring Γ_G ニテ，ソノ上ノ linear functional F:

$$F_G \ni f \longrightarrow F(f)$$

ガ

$$(22) \quad \begin{cases} F(fg) = F(f) \cdot F(g) \\ F(\bar{f}) = \overline{F(f)} \end{cases}$$

ヲ満足スルナラバ，實ハアル $x_0 \in G$ ガ存在シテ $F(f) = f(x_0)$ トナル。』

（証）(22) 式ヨリ $F(f\bar{f}) \geqq 0$ デアル。故ニ

$$F(1) = F\left(\sum_{k=1}^{n} |u_{jk}(x)|^2\right) = \sum_{1}^{n} F(|u_{jk}(x)|^2)$$

ヨリ

(23) $F(1) \geqq F(|u_{jk}(x)|^2) \geqq 0$

トナル。次ニ (22) ヨリ

$$0 \leqq F(|\lambda + u_{jk}(x)|^2)$$
$$= |\lambda|^2 F(1) + 2\Re\{\lambda F(u_{jk})\} + F(|u_{jk}|^2)$$

カラ例ノ論法デ (23) ヲ用ヒテ

$$|F(u_{jk})|^2 \leqq F(1)\, F(|u_{jk}|^2) \leqq F(1)^2$$

即チ

(24) $|F(u_{jk})| \leqq F(1)$

トナル。(24) ヲ用ヒテ Γ_G 上デ def. サレタ F ヲ §4 デ考ヘタ $\mathfrak{R}_3$ ニマデ拡張スル。ソレニハ $\mathfrak{R}_3 \ni f(x)$ トスレバ (20) カラ

$$f(x) = \sum_{\alpha, i} \lambda_i^{(\alpha)} u_{ii}^{(\alpha)}(x)$$

ト絶対且一様収斂級数ニ展開サレ，特ニ $\sum_{i,\alpha} |\lambda_i^{(\alpha)}| < \infty$ デアル。故ニ

$$F(f) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{\alpha, i}^{n} \lambda_i^{(\alpha)} F(v_{ii}^{(\alpha)}(x)) \right)$$

トスレバ，(24) 式ヨリ確カニ limit ハ存在シテ，其ノ時

$$F(f+g) = F(f) + F(g),\ F(\alpha f) = \alpha F(f)\ (\alpha : \text{実数}),$$
$$F(fg) = F(f) \cdot F(g)$$

ハ確カニ保タレルコトガワカル。然ルトキハ定理 5 カラ $F(f) = f(x_0)$ ナル $x_0 \in G$ が存在スル。即チ定理ハ証

明サレタ。

§7

Gガ bicompactデナイ時ハ，良ク知ラレテキル様ニGヲ拡大スレバヨイ。今Gヲ十分ニ澤山ノ almost periodic function ヲモツトスル。コノ全体ヲA_Gトスル。$A_G \ni f$ニ對シテ

$$\rho_f(x, y) = \overline{\mathrm{fin}}_{a,b \in G} (|f(axb) - f(ayb)|)$$

デGノ metric ヲ定メレバ，

$$\rho_f(x, y) = \rho_f(sxt, syt) = \rho_f(x^{-1}, y^{-1})$$

スベテノ$f \in A_G$ニ對シテカヽルρ_fヲ作リ、其ノ全体$\{\rho_f\}$デ定メル uniform structure $\mathfrak{U}$ ヲ考ヘル。ρ_f ($f \in A_G$) ニ関シテハGハ totally bounded ナル故，$\mathfrak{U}$自身 totally bounded，從ツテGヲ$\mathfrak{U}$ニ関シテ complete ニ拡大スレバ，bicompact group $\overline{G}$ヲ得ル。（其ノ時x^{-1}ガ一様連續デアルカラ）．

又$\{u_{ij}(x)\}$ヲGノ unitary 表現トスレバ，$u_{ij}(x) \in A_f$ハ$\mathfrak{U}$ニツイテ一様連續デアルカラ$\overline{G}$ニマデ延長サレル。即チ延長$\{\overline{u}_{ij}(x)\}$ハ又$\overline{G}$ノ表現トナル。即チGノ上ノスベテノ almost periodic function ト$\overline{G}$ノ上ノスベテノ連續函数トハ一致スル。又Gノスベテノ unitary 表現系ハ$\overline{G}$ノ上ノスベテノ連續 unitary 表現系トモ一致スル。

Gハ$\overline{G}$中 everywhere dense デアルガ，今G

ニ topology ガアッテ、$A_G \ni f$ ガスベテ G デ continuous ナモノヲ考ヘルナラバ，コノ embedding ハ又 continuous トナル。

其ノタメニハ $f = u_{ij}(x)$ ノ場合ニ，與ヘラレタ ε ニ對シテ G ノ單位元ノ近傍 $\mathfrak{U}$ ガ定マリ，$xy^{-1} \in \mathfrak{U}$ ナラバ $\rho_f(x, y) < \varepsilon$ ナラシメルコトガイヘレバ十分デアル。一般ノ場合ハ此ノ場合ニ容易ニ歸着サレル。サテ $(u_{ij}(x))$ ノ次數ヲ r トスレバ，$xy^{-1} \in \mathfrak{U}$ ナラバ

$$|u_{kl}(x) - u_{kl}(y)| < \frac{\varepsilon}{r^2} \ (k, l = 1, \cdots\cdots, r)$$

ニナル様ニ $\mathfrak{U}$ ヲ取ルコトガ出來ル。ソウスレバ

$$\begin{aligned}\rho_f(x, y) &= \overline{\mathop{fin}_{a,b}}\left(|u_{ij}(axb) - u_{ij}(ayb)|\right)\\ &= \overline{fin}\Big(\Big|\sum_{k,l} u_{ik}(a)\big(u_{kl}(x) - u_{kl}(y)\big)\\ &\qquad\qquad u_{lj}(b)\Big|\Big)\\ &\leqq \sum_{k,l}|u_{kl}(x) - u_{kl}(y)| \leqq \varepsilon\end{aligned}$$

トナル。 q.e.d.

故ニ一般ノ G ニ關スル双對定理（Tannaka, Satz 3, Satz 4, Satz 1）ハ定理 6 ニ歸着サレル譯デアル。

§ 7

上ノ議論ト關聯シテ，bicompact group ノ上ノ positive definite function（今マデノ意味トハ逆ノ）ノ特性ヲ擧ゲルコトガ出來ル。先ヅ上ノ $u_{ij}^{(\alpha)}(x)$ ヲスベテ一ツノ番号デ書イテ（必ズシモ可算個デハナイガ）

$u_i(x)$ トスル。

$$(25)\quad \begin{cases} u_i(x)\,\overline{u_j(x)} = \sum_k a_{ij}^k\, u_k(x) \\ \overline{u_j(x)} = \sum_k b_j^k\, u_k(x) \qquad (b_j^k = a_{j}^{k}) \end{cases}$$

ト有限和ニ分解出来ル。今 G ノ上ノスベテノ Borel set 上デ定義サレタ completely additive non-negative measure m ($m(G)=1$) ガアッテ，ソレカラ

$$(26)\quad f_i = F(u_i) = \int_G u_i(x)\, m(dx)$$

ヲ作レバ

$$(27)\quad \sum_{ijk} a_{ij}^k f_k \xi_i \overline{\xi_j} \geqq 0$$

ガ任意ニ與ヘタ有限箇ノ complex numbers $\xi_1 \cdots \xi_n$ ニ對シテ成立スル。何トナレバ

$$\sum_{ijk} a_{ij}^k f_k \xi_i \overline{\xi_j} = \sum_{ij} \int u_i(x)\, \overline{u_j(x)}\, m(dx)\, \xi_i \overline{\xi_j}$$

$$= \left| \int \sum_i u_i(x) \xi_i\, m(dx) \right|^2 \geqq 0 \text{ —}$$

<u>定理7</u>. 『與ヘラレタ f_i ($i=1,2,\cdots\cdots$) ナル集リガ

$$f_i = \int_G u_i(x)\, m(dx) \qquad (i=1,2,\cdots\cdots)$$

トシテ表ハサレルタメノ必要十分條件ハ (27) 及ビ

$$(28)\quad \overline{f_j} = \sum_k b_j^k f_k \qquad (i=1,2,\cdots\cdots)$$

ノ成立スルコトデアル。』

(証) 必要ハ上ニ見タ十分ナルコト。§ 6デ考ヘタ Γ_G デ, $\Gamma_G \ni \sum \alpha_i u_i(x) \to \sum \alpha_i f_i$ ニヨッテ linear functional F ヲ定義スル。F ノ持ツ性質ハ(27), (28) カラ

(29) $F(f\cdot\bar{f}) \geqq 0, \quad F(\bar{f}) = \overline{F(f)}$

デアル。之レカラ定理 6 ノ証明ト同様ニ F ヲ $\mathfrak{R}_3$ 全体ニマデ擴張スルコトガ出来テ, 且ツ (29) ハ其ノマヽ保タレル。

サテ $\varphi \in \mathfrak{R}_3$ ヲ $\varphi(s) \geqq 0$ $(s \in G)$ トスル。任意ノ正数 ε ニ對シテ $\sqrt{\varepsilon+\varphi(s)}$ ヲ考ヘレバ, 定理 5 ト Gelfand, Satz 20 トカラ, 亦 $\mathfrak{R}_3$ ニ属スル。故ニ

$$0 \leqq F\left(\left|\sqrt{\varepsilon+\varphi(s)}\right|^2\right) = \varepsilon F(1) + F(\varphi)$$

故ニ $F(\varphi) \geqq 0$ トナル。特ニ $\Gamma_G \subset \mathfrak{R}_3$ ナル故, F ハ Γ_G ノ上デ positive functional トナル。

$\mathfrak{R}_0$ ヲ G ノ上ノ連続函数全体トスレバ, uniform topology ニ關シテ Γ_G ハ $\mathfrak{R}_0$ 中 dense デアルカラ (almost periodic function ニ關スル approximation theorem ニ依ッテ) Γ_G 上ノ positive linear functional F ヲ $\mathfrak{R}_0$ 全体ニマデ拡張シテ

(イ) $F(f+g) = F(f) + F(g)$

(ロ) $f(x) \geqq 0$ ナラバ $F(f) \geqq 0$

トスルコトガ出来ル。G ハ bicompact デアルカラ Riesz ノ定理カラ $F(f) = \int_G f(x)\, m(dx)$ ナル completely additive non-negative measure

が存在スル。

——（河田，森田，宮澤）——